

YAPI STATİĞİ 1

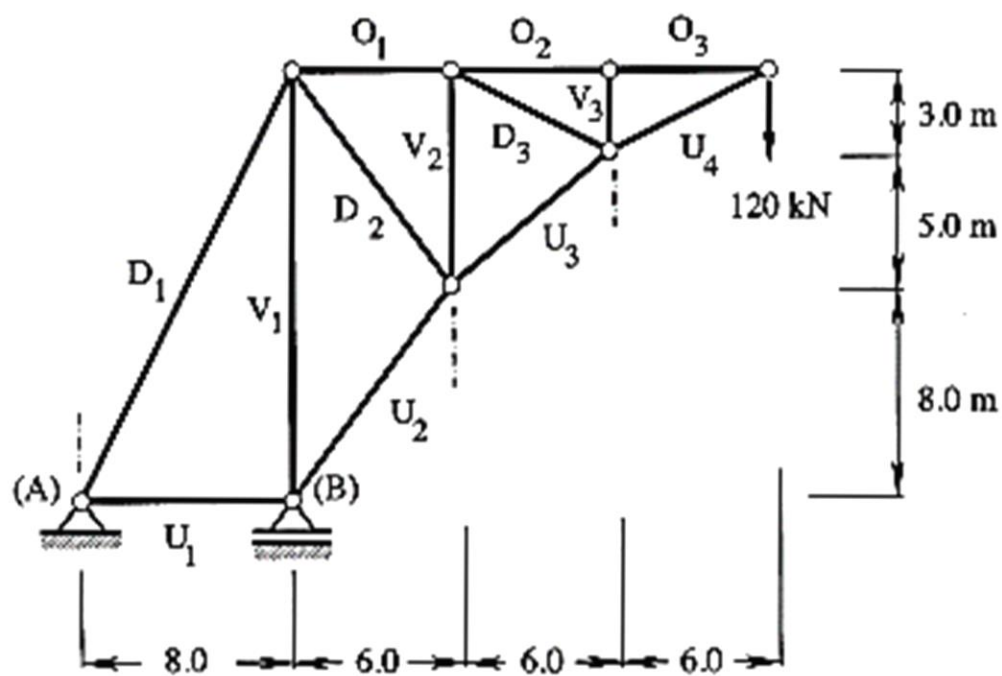
DERS NOTLARI 7b

Prof. Dr. Cengiz Dünder

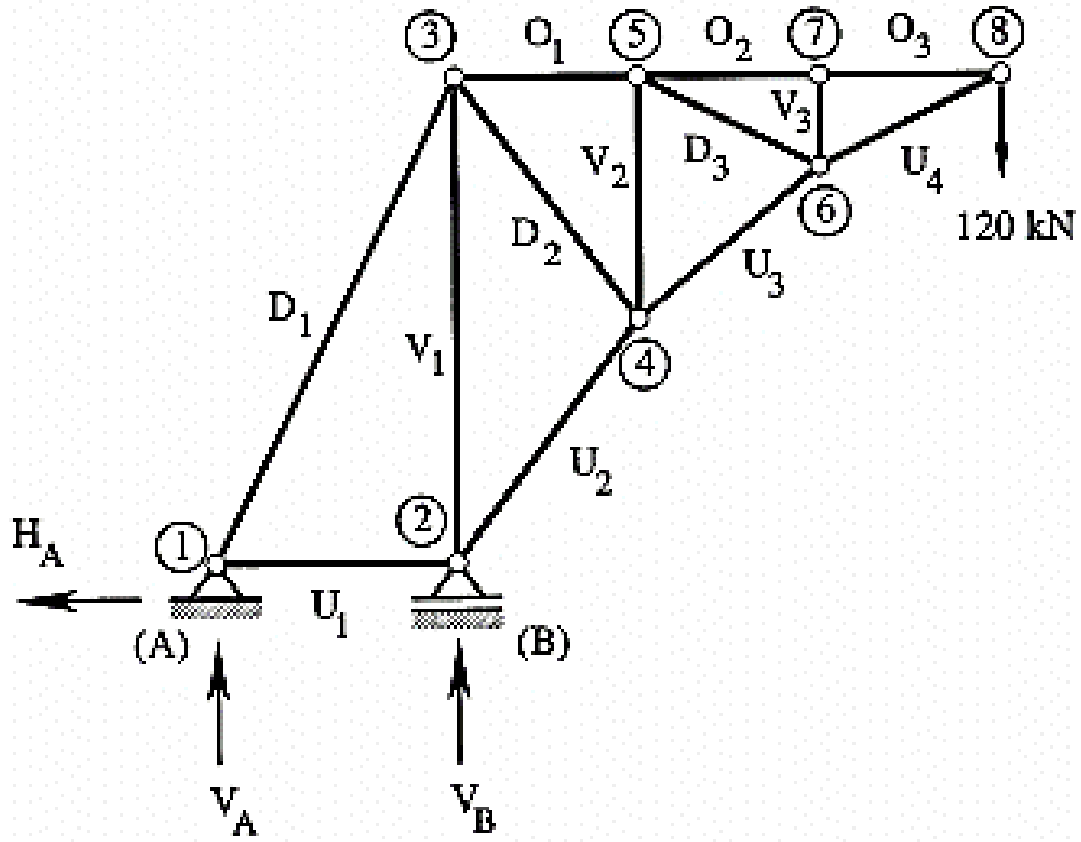
PROBLEM 7.1

SAP2000

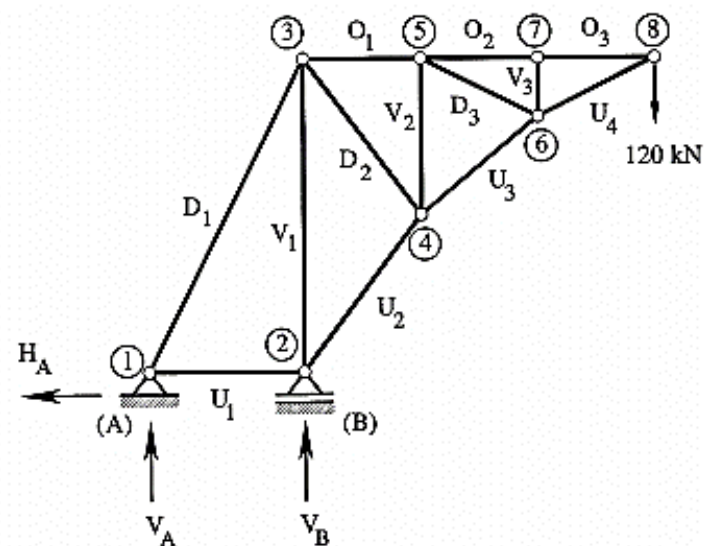
Şekil 7.1 de verilen kafes sistemin çubuk kuvvetlerini hesaplayınız.



Şekil 7.1: Kafes sistem ve etkiyen dış yük



Şekil 7.1a: Kafes sistem, düğüm noktaları ve mesnet tepkileri



Şekil 7.1a: Kafes sistem, düğüm noktaları ve mesnet tepkileri

Kafes sistemde, yatay izdüşüm denge denklemini yazıldığında

$$(\rightarrow+) \Sigma F_x = 0$$

$$\Rightarrow H_A = 0 \checkmark$$

A sabit mesnetine göre moment denge denklemini yazıldığında

$$(\curvearrow+) \Sigma M_A = 0$$

$$-V_B \times 8.00 + 120 \times 26.00 = 0$$

$$\Rightarrow V_B = 390.00 \text{ kN} \uparrow \checkmark$$

B kayıcı mesnetine göre moment denge denklemini yazıldığında ise

$$(\curvearrow+) \Sigma M_B = 0$$

$$V_A \times 8.00 + 120 \times 18.00 = 0$$

$$\Rightarrow V_A = -270.00 \text{ kN} \uparrow \checkmark$$

olarak elde edilir.

Elde edilen mesnet tepkilerinin doğruluğunu kontrol etmek amacıyla, düşey izdüşüm denge denklemini yazılacaktır.

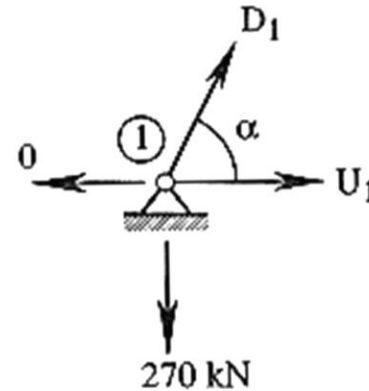
Kontrol: $(\uparrow+) \Sigma F_y = 0$ olmalıdır.

$$\Sigma F_y = V_A + V_B - 120 = -270 + 390 - 120 = 0 \checkmark$$

şeklinde bulunur.

➤ **(1) düğüm noktası:**

(1) düğüm noktası Şekil 7.1b de verilmiştir.



Şekil 7.1b: (1) düğüm noktası

D_1 eğik çubuğunun yatayla yaptığı α açısı ve bu açiya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler

$$\tan \alpha = \frac{16}{8} = 2 \Rightarrow \alpha = 63.435 \Rightarrow [\cos \alpha = 0.4472 \quad , \quad \sin \alpha = 0.8944]$$

dir.

Sözkonusu düğüm noktasında, düşey izdüşüm denge denklemi yazılırsa

$$(\uparrow +) \Sigma F_y = 0 \quad D_1 \times \sin \alpha - 270 = 0 \quad \Rightarrow D_1 = +301.878 \text{ kN} \checkmark$$

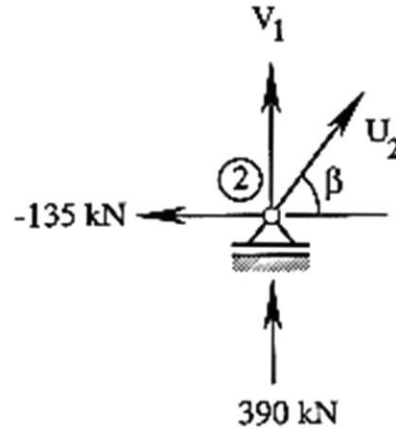
yatay izdüşüm denge denklemi yazıldığında ise

$$(\rightarrow +) \Sigma F_x = 0 \quad U_1 + D_1 \times \cos \alpha = 0 \quad \Rightarrow U_1 = -135.00 \text{ kN} \checkmark$$

olarak elde edilir.

➤ **(2) düğüm noktası:**

(2) düğüm noktası Şekil 7.1c de verilmiştir.



Şekil 7.1c: (2) düğüm noktası

U_2 eğik çubuğunun yatayla yaptığı β açısı ve bu açya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler

$$\tan \beta = \frac{8}{6} \Rightarrow \beta = 53.130 \Rightarrow [\cos \beta = 0.6, \sin \beta = 0.8]$$

dir.

Sözkonusu düğüm noktasında, yatay izdüşüm denge denklemi yazılırsa

$$(\rightarrow+) \Sigma F_x = 0 \quad -(-135) + U_2 \times \cos \beta = 0 \quad \Rightarrow U_2 = -225.00 \text{ kN} \checkmark$$

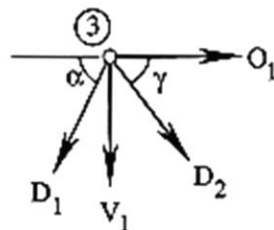
düşey izdüşüm denge denklemi yazıldığında ise

$$(\uparrow+) \Sigma F_y = 0 \quad 390 + V_1 + U_2 \times \sin \beta = 0 \quad \Rightarrow V_1 = -210.00 \text{ kN} \checkmark$$

şeklinde hesaplanır.

➤ (3) düğüm noktası:

(3) düğüm noktası Şekil 7.1d de verilmiştir.



Şekil 7.1d: (3) düğüm noktası

D_2 eğik çubuğunun yatayla yaptığı γ açısı ve bu açiya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler

$$\tan \gamma = \frac{8}{6} \Rightarrow \gamma = 53.130 \Rightarrow [\sin \gamma = 0.8, \cos \gamma = 0.6]$$

dir. D_1 eğik çubuğunun yatayla yaptığı α açısına bağlı olarak elde edilen değerler daha önce verilmiştir.

Buna göre sözkonusu düğüm noktasında, düşey izdüşüm denge denklemini yazılırsa

$$(\uparrow+) \Sigma F_y = 0 \quad -D_2 \times \sin \gamma - V_1 - D_1 \times \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow D_2 = -75.00 \text{ kN} \checkmark$$

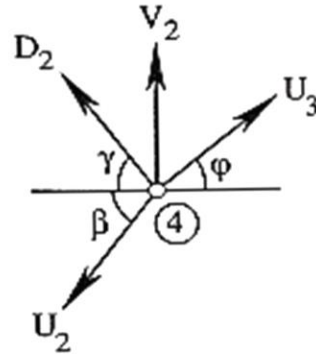
yatay izdüşüm denge denklemini yazıldığında ise

$$(\rightarrow+) \Sigma F_x = 0 \quad O_1 + D_2 \times \cos \gamma - D_1 \times \cos \alpha = 0 \quad \Rightarrow O_1 = +180.00 \text{ kN} \checkmark$$

olarak hesaplanır.

➤ **(4) düğüm noktası:**

(4) düğüm noktası Şekil 7.1e de verilmiştir.



Şekil 7.1e: (4) düğüm noktası

U_3 çubuğunun yatayla yaptığı φ açısı ve bu açıya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler

$$\tan \varphi = \frac{5}{6} \Rightarrow \varphi = 39.806 \Rightarrow [\sin \varphi = 0.6402, \cos \varphi = 0.7682]$$

dir. Diğer eğik çubukların yatayla yaptıkları açılara bağlı olarak elde edilen değerler daha önce verilmiştir.

Buna göre söz konusu düğüm noktasında, yatay izdüşüm denge denklemi yazılırsa

$$(\rightarrow +) \Sigma F_x = 0 \quad U_3 \times \cos \varphi - D_2 \times \cos \gamma - U_2 \times \cos \beta = 0 \quad \Rightarrow U_3 = -234.314 \text{ kN} \checkmark$$

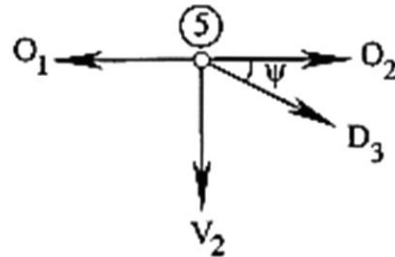
düşey izdüşüm denge denklemi yazıldığında ise

$$(\uparrow +) \Sigma F_y = 0 \quad V_2 + U_3 \times \sin \varphi + D_2 \times \sin \gamma - U_2 \times \sin \beta = 0 \quad \Rightarrow V_2 = +30.00 \text{ kN} \checkmark$$

olarak elde edilir.

➤ **(5) düğüm noktası:**

(5) düğüm noktası Şekil 7.1f de verilmiştir.



Şekil 7.1f: (5) düğüm noktası

D_3 çubuğunun yatayla yaptığı ψ açısı ve bu açiya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler

$$\tan \psi = \frac{3}{6} = 0.5 \Rightarrow \psi = 26.565 \Rightarrow [\sin \psi = 0.4472 \quad , \quad \cos \psi = 0.8944]$$

dir.

Sözkonusu düğüm noktasında, düşey izdüşüm denge denklemi yazılırsa

$$(\uparrow+) \Sigma F_y = 0 \quad -V_2 - D_3 \times \sin \psi = 0 \quad \Rightarrow D_3 = -67.084 \text{ kN} \checkmark$$

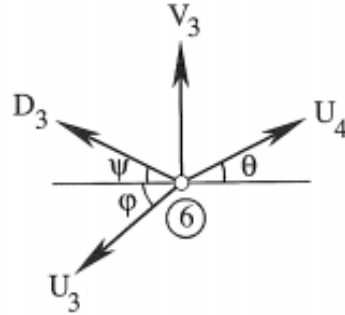
yatay izdüşüm denge denklemi yazıldığında ise

$$(\rightarrow+) \Sigma F_x = 0 \quad O_2 + D_3 \times \cos \psi - O_1 = 0 \quad \Rightarrow O_2 = +240.00 \text{ kN} \checkmark$$

şeklinde hesaplanır.

➤ **(6) düğüm noktası:**

(6) düğüm noktası Şekil 7.1g de verilmiştir.



Şekil 7.1g: (6) düğüm noktası

U_4 çubuğunun yatayla yaptığı θ açısı ve bu açiya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler

$$\tan \theta = \frac{3}{6} = 0.5 \Rightarrow \theta = 26.565 \Rightarrow [\sin \theta = 0.4472, \cos \theta = 0.8944]$$

dir. Diğer eğik çubukların yatayla yaptıkları açılara bağlı olarak elde edilen değerler daha önce verilmiştir.

Buna göre, sözkonusu düğüm noktasında yatay izdüşüm denge denklemi yazılırsa

$$(\rightarrow +) \Sigma F_x = 0 \quad U_4 \times \cos \theta - D_3 \times \cos \psi - U_3 \times \cos \phi = 0 \quad \Rightarrow U_4 = -268.336 \text{ kN} \checkmark$$

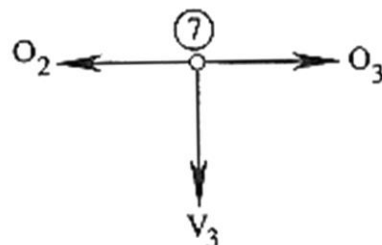
düşey izdüşüm denge denklemi yazıldığında ise

$$(\uparrow +) \Sigma F_y = 0 \quad V_3 + U_4 \times \sin \theta + D_3 \times \sin \psi - U_3 \times \sin \phi = 0 \quad \Rightarrow V_3 = 0 \checkmark$$

olarak elde edilir.

➤ (7) düğüm noktası:

(7) düğüm noktası Şekil 7.1h da verilmiştir.



Şekil 7.1h: (7) düğüm noktası

Sözkonusu düğüm noktasında, yatay izdüşüm denge denklemi yazılırsa

$$(\rightarrow +) \Sigma F_x = 0 \quad O_3 - O_2 = 0 \quad \Rightarrow O_3 = O_2 = +240.00 \text{ kN} \checkmark$$

şeklinde hesaplanır.

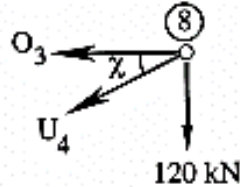
Düşey izdüşüm denge denklemi ise, V_3 çubuk kuvveti daha önceden hesaplanmış olduğundan, kontrol amacıyla yazılacaktır.

$$\text{Kontrol: } (\uparrow +) \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_3 = 0 \checkmark$$

bulunur.

➤ **(8) düğüm noktası:**

(8) düğüm noktası Şekil 7.1i de verilmiştir.



Şekil 7.1i: (8) düğüm noktası

Sözkonusu düğüm noktasında **düşey ve yatay izdüşüm denge denklemleri**, O_3 ve U_4 çubuk kuvvetleri daha önceden hesaplanmış olduğundan, kontrol amacıyla yazılacaktır.

U_4 çubuğunun yatayla yaptığı χ açısı ve bu açiya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler

$$\tan \chi = \frac{3}{6} = 0.5 \Rightarrow \chi = 26.565 \Rightarrow [\sin \chi = 0.4472 \quad , \quad \cos \chi = 0.8944]$$

dir.

Buna göre, **düşey izdüşüm denge denklemini** yazıldığında

Kontrol-1: **(↑+) $\Sigma F_y = 0$** olmalıdır.

$$\Sigma F_y = -120 - U_4 \times \sin \chi = 0 \quad \Rightarrow U_4 = -268.336 \text{ kN} \checkmark$$

yatay izdüşüm denge denklemini yazıldığında ise

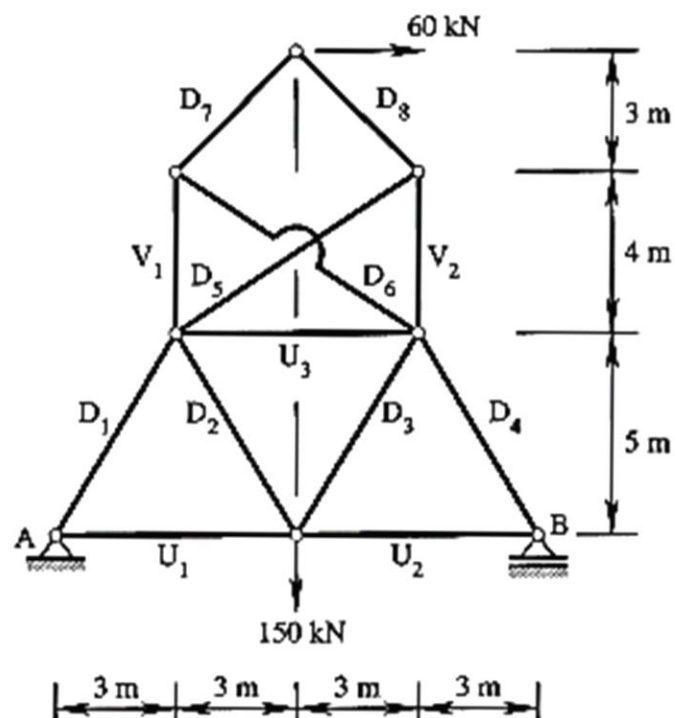
Kontrol-2: **(→+) $\Sigma F_x = 0$** olmalıdır.

$$\Sigma F_x = -O_3 - U_4 \times \cos \chi = 0 \quad \Rightarrow O_3 = +240.00 \text{ kN} \checkmark$$

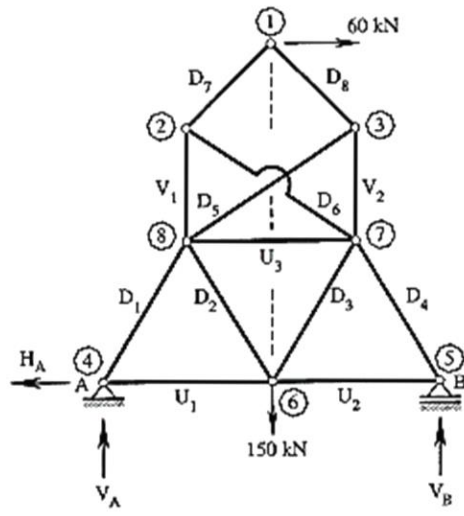
şeklinde bulunur.

PROBLEM 7.2

Şekil 7.2 de verilen kafes sistemin çubuk kuvvetlerini hesaplayınız.



Şekil 7.2: Kafes sistem ve dış yükler



Şekil 7.2a: Kafes sistem, düğüm noktaları ve mesnet tepkileri

Kafes sistemde, yatay izdüşüm denge denklemi yazılırsa

$$(\rightarrow+) \Sigma F_x = 0 \quad 60 - H_A = 0 \quad \Rightarrow H_A = 60.00 \text{ kN} \leftarrow \checkmark$$

A sabit mesnetine göre moment denge denklemi yazılırsa

$$(\curvearrow+) \Sigma M_A = 0 \quad 60 \times 12.00 + 150 \times 6.00 - V_B \times 12.00 = 0 \quad \Rightarrow V_B = 135.00 \text{ kN} \uparrow \checkmark$$

B kayıcı mesnetine göre moment denge denklemi yazıldığında ise

$$(\curvearrow+) \Sigma M_B = 0 \quad V_A \times 12.00 + 60 \times 12.00 - 150 \times 6.00 = 0 \quad \Rightarrow V_A = 15.00 \text{ kN} \uparrow \checkmark$$

olarak elde edilir.

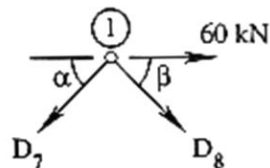
Elde edilen mesnet tepkilerinin doğruluğunu kontrol etmek amacıyla, düşey izdüşüm denge denklemi yazılacaktır.

Kontrol: $(\uparrow+) \Sigma F_y = 0$ olmalıdır.

$$\Sigma F_y = V_A + V_B - 150 = 15 + 135 - 150 = 0 \quad \checkmark$$

➤ **(1) düğüm noktası:**

(1) düğüm noktası Şekil 7.2b de verilmiştir.



Şekil 7.2b: (1) düğüm noktası

D_7 çubuğunun yatayla yaptığı α açısı ve bu açiya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler

$$\tan \alpha = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow [\sin \alpha = 0.7071, \cos \alpha = 0.7071]$$

D_8 çubuğunun yatayla yaptığı β açısı ve bu açiya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler ise

$$\tan \beta = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow \beta = 45^\circ \Rightarrow [\sin \beta = 0.7071, \cos \beta = 0.7071]$$

dir.

Sözkonusu düğüm noktasında, yatay izdüşüm denge denklemi yazılırsa

$$(\rightarrow +) \Sigma F_x = 0 \quad 60 + D_8 \times \cos \beta - D_7 \times \cos \alpha = 0 \quad \text{(I)}$$

düşey izdüşüm denge denklemi yazıldığında ise

$$(\uparrow +) \Sigma F_y = 0 \quad -D_8 \times \sin \beta - D_7 \times \sin \alpha = 0 \quad \text{(II)}$$

şeklinde iki bilinmeyenli iki denklem elde edilir. (I) ve (II) denklemlerinin ortak çözümünden D_7 ve D_8 çubuk kuvvetleri

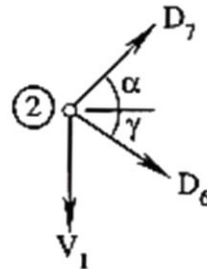
$$-0.7071 \times D_7 + 0.7071 \times D_8 = -60$$

$$-0.7071 \times D_7 - 0.7071 \times D_8 = 0$$

$$\Rightarrow D_7 = +42.427 \text{ kN} \quad \Rightarrow D_8 = -42.427 \text{ kN}$$

➤ **(2) düğüm noktası:**

(2) düğüm noktası Şekil 7.2c de verilmiştir.



Şekil 7.2c: (2) düğüm noktası

D_6 çubuğunun yatayla yaptığı γ açısı ve bu açiya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler

$$\tan \gamma = \frac{4}{6} \Rightarrow \gamma = 33.690 \Rightarrow [\sin \gamma = 0.5547 \quad , \quad \cos \gamma = 0.8321]$$

dir.

Sözkonusu düğüm noktasında, yatay izdüşüm denge denklemleri yazılırsa

$$(\rightarrow +) \Sigma F_x = 0 \quad D_7 \times \cos \alpha + D_6 \times \cos \gamma = 0 \quad \Rightarrow D_6 = -36.054 \text{ kN} \checkmark$$

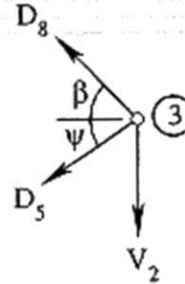
düsey izdüşüm denge denklemleri yazıldığında ise

$$(\uparrow +) \Sigma F_y = 0 \quad D_7 \times \sin \alpha - V_1 - D_6 \times \sin \gamma = 0 \quad \Rightarrow V_1 = +50.00 \text{ kN} \checkmark$$

olarak elde edilir.

➤ (3) düğüm noktası:

(3) düğüm noktası Şekil 7.2d de verilmiştir.



Şekil 7.2d: (3) düğüm noktası

D_5 çubuğunun yatayla yaptığı ψ açısı ve bu açiya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler

$$\tan \psi = \frac{4}{6} \Rightarrow \psi = 33.690 \Rightarrow [\sin \psi = 0.5547, \quad \cos \psi = 0.8321]$$

dir.

Sözkonusu düğüm noktasında, yatay izdüşüm denge denklemi yazılırsa

$$(\rightarrow+) \Sigma F_x = 0 \quad -D_8 \times \cos \beta - D_5 \times \cos \psi = 0 \quad \Rightarrow D_5 = +36.054 \text{ kN} \checkmark$$

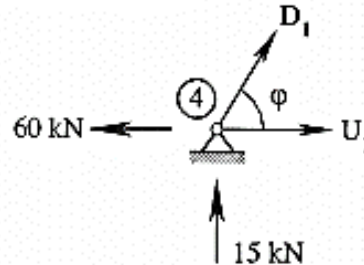
düşey izdüşüm denge denklemi yazıldığında ise

$$(\uparrow+) \Sigma F_y = 0 \quad -V_2 - D_5 \times \sin \psi + D_8 \times \sin \beta = 0 \quad \Rightarrow V_2 = -50.00 \text{ kN} \checkmark$$

şeklinde hesaplanır.

➤ **(4) düğüm noktası:**

(4) düğüm noktası Şekil 7.2e de verilmiştir.



Şekil 7.2e: (4) düğüm noktası

D_1 çubuğunun yatayla yaptığı φ açısı ve bu açıya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler

$$\tan \varphi = \frac{5}{3} \Rightarrow \varphi = 59.036 \Rightarrow [\sin \varphi = 0.8575, \cos \varphi = 0.5145]$$

dir.

Söz konusu düğüm noktasında, düşey izdüşüm denge denklemi yazılırsa

$$(\uparrow+) \Sigma F_y = 0 \quad 15 + D_1 \times \sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow D_1 = -17.493 \text{ kN} \checkmark$$

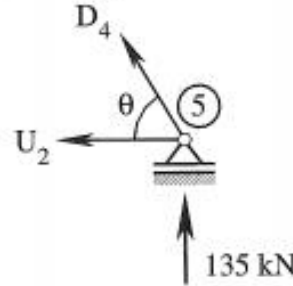
yatay izdüşüm denge denklemi yazıldığında ise

$$(\rightarrow+) \Sigma F_x = 0 \quad U_1 + D_1 \times \cos \varphi - 60 = 0 \quad \Rightarrow U_1 = +69.00 \text{ kN} \checkmark$$

olarak bulunur.

➤ **(5) düğüm noktası:**

(5) düğüm noktası Şekil 7.2f de verilmiştir.



Şekil 7.2f: (5) düğüm noktası

D_4 çubuğunun yatayla yaptığı θ açısı ve bu açiya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler

$$\tan \theta = \frac{5}{3} \Rightarrow \theta = 59.036 \Rightarrow [\sin \theta = 0.8575, \cos \theta = 0.5145]$$

dir.

Söz konusu düğüm noktasında, düşey izdüşüm denge denklemini yazılırsa

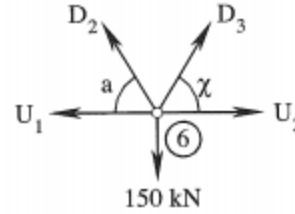
$$(\uparrow+) \Sigma F_y = 0 \quad D_4 \times \sin \theta + 135 = 0 \quad \Rightarrow D_4 = -157.434 \text{ kN} \checkmark$$

yatay izdüşüm denge denklemini yazıldığında ise

$$(\rightarrow+) \Sigma F_x = 0 \quad -U_2 - D_4 \times \cos \theta = 0 \quad \Rightarrow U_2 = +81.00 \text{ kN} \checkmark$$

➤ (6) düğüm noktası:

(6) düğüm noktası Şekil 7.2g de verilmiştir.



Şekil 7.2g: (6) düğüm noktası

D₃ çubuğunun yatayla yaptığı χ açısı ve bu açiya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler

$$\tan \chi = \frac{5}{3} \Rightarrow \chi = 59.036 \Rightarrow [\sin \chi = 0.8575 \quad , \quad \cos \chi = 0.5145]$$

D₂ çubuğunun yatayla yaptığı a açısı ve bu açiya bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler ise

$$\tan a = \frac{5}{3} \Rightarrow a = 59.036 \Rightarrow [\sin a = 0.8575 \quad , \quad \cos a = 0.5145]$$

dir.

U₁ ve U₂ çubuk kuvvetleri daha önce hesaplandığına göre, sözkonusu düğüm noktasında yatay izdüşüm denge denklemi yazılırsa

$$\begin{aligned} (\rightarrow+) \Sigma F_x &= 0 & U_2 - U_1 + D_3 \times \cos \chi - D_2 \times \cos a &= 0 \\ & & 81.00 - 69.00 + 0.5145 \times D_3 - 0.5145 \times D_2 &= 0 \\ & & \Rightarrow -0.5145 \times D_2 + 0.5145 \times D_3 &= -12 \end{aligned}$$

düşey izdüşüm denge denklemi yazıldığında ise

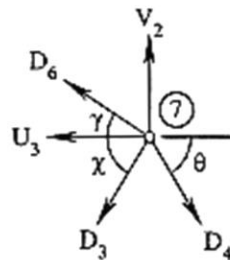
$$\begin{aligned} (\uparrow+) \Sigma F_y &= 0 & D_2 \times \sin a + D_3 \times \sin \chi - 150 &= 0 \\ & & \Rightarrow 0.8575 \times D_2 + 0.8575 \times D_3 &= 150 \end{aligned}$$

olarak iki bilinmeyenli iki denklem elde edilir. Bu denklem sistemi çözülerek

$$\Rightarrow D_2 = +99.125 \text{ kN} \quad \Rightarrow D_3 = +75.802 \text{ kN}$$

➤ **(7) düğüm noktası:**

(7) düğüm noktası Şekil 7.2h da verilmiştir.



Şekil 7.2h: (7) düğüm noktası

θ, γ, χ açıları ile D_4, D_6, D_3 çubuk kuvvetleri daha önce hesaplanmıştır. Buna göre, söz konusu düğüm noktasında yatay izdüşüm denge denklemleri yazılırsa

$$\begin{aligned} (\rightarrow+) \Sigma F_x &= 0 & D_4 \times \cos \theta - D_6 \times \cos \gamma - D_3 \times \cos \chi - U_3 &= 0 \\ & & D_4 \times 0.5145 - D_6 \times 0.8321 - D_3 \times 0.5145 - U_3 &= 0 \Rightarrow U_3 = -90.00 \text{ kN} \checkmark \end{aligned}$$

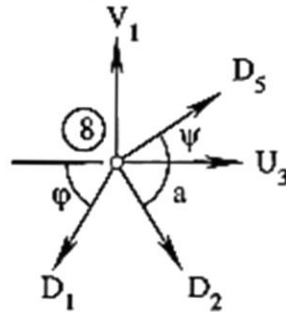
olarak elde edilir. (7) düğüm noktasındaki tüm çubuk kuvvetleri bilindiği için, dikey izdüşüm denge denklemleri kontrol amacıyla yazılacaktır.

Kontrol: $(\uparrow+) \Sigma F_y = 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= V_2 + D_6 \times \sin \gamma - D_3 \times \sin \chi - D_4 \times \sin \theta = -50 + D_6 \times 0.5547 - \dots \\ &\dots - D_3 \times 0.8575 - D_4 \times 0.8575 = 0 \checkmark \end{aligned}$$

➤ **(8) düğüm noktası:**

(8) düğüm noktası Şekil 7.2i de verilmiştir.



Şekil 7.2i: (8) düğüm noktası

Sözkonusu düğüm noktasındaki tüm çubuk kuvvetleri ile açılar daha önce hesaplandığından, yatay ve düşey izdüşüm denge denklemleri kontrol amacıyla yazılacaktır.

Kontrol-1: $(\rightarrow+) \Sigma F_x = 0$ olmalıdır.

$$\Sigma F_x = D_5 \times \cos \psi + U_3 + D_2 \times \cos a - D_1 \times \cos \varphi = 0 \quad \checkmark$$

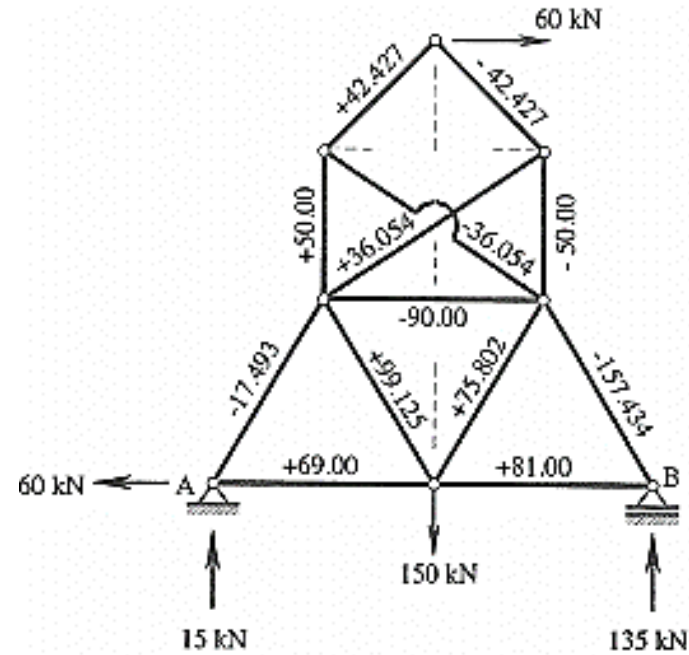
Kontrol-2: $(\uparrow+) \Sigma F_y = 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= V_1 + D_5 \times \sin \psi - D_2 \times \sin a - D_1 \times \sin \varphi = 50 + 36.053 \times 0.5547 - \dots \\ &\dots - 99.125 \times 0.8575 + 17.493 \times 0.8575 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Tablo 7.2: Çubuk kuvvetleri

Çubuk	Çubuk Kuvvetleri (kN) Çekme (+) , Basınç (-)
U ₁	+69.000
U ₂	+81.000
U ₃	-90.000
D ₁	-17.493
D ₂	+99.125
D ₃	+75.802
D ₄	-157.434
D ₅	+36.054
D ₆	-36.054
D ₇	+42.427
D ₈	-42.427
V ₁	+50.000
V ₂	-50.000



Şekil 7.2j: Çubuk kuvvetleri: (+) Çekme , (-) Basınç